**Parte propedeutica**

# Principio di induzione

## Quinto assioma di Peano (principio di induzione: prima forma)

|  |
| --- |
| Sia un insieme che verifica le seguenti proprietà:   1. (**base dell’induzione**) 2. (**passo induttivo**)   Allora . |

## Principio di induzione (seconda forma)

|  |
| --- |
| Sia una proprietà vera per .  Supponiamo che se è vera, allora è vera anche .  Allora è vera per ogni *n*. |

## Principio di induzione (“da un certo punto in poi”)

|  |
| --- |
| Sia . Supponiamo che:   1. se allora   Allora |

## Fattoriale di un numero (per induzione)

|  |
| --- |
| Il fattoriale di un numero *n* rappresenta il prodotto dei primi *n* numeri naturali ed è definito come: |

# Campi ordinati

## Proprietà dell’insieme

### **R1**: addizione o somma

|  |
| --- |
| È definita in un’operazione detta **addizione** (o **somma**) con le seguenti proprietà:   1. **commutativa**: ; 2. **associativa**: 3. esistenza dell’**elemento neutro** della somma (0) tale che 4. esistenza dell’**opposto** di ogni elemento: |

### **R2**: moltiplicazione o prodotto

|  |
| --- |
| È definita in un’operazione detta **moltiplicazione** (o **prodotto**) con le seguenti proprietà:   1. **commutativa**: 2. **associativa**: 3. esistenza dell’**elemento neutro** del prodotto (indicato con 1) tale che 4. esiste un elemento detto l’**inverso** di *a* indicato con o tale che 5. **proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto**: |

### **R3**: relazione d’ordine totale

|  |
| --- |
| Su è definita una **relazione d’ordine totale** tale che:   1. se allora ; 2. con , se allora |

## Insieme ordinato e totalmente ordinato

|  |
| --- |
| Un insieme X si dice **ordinato** se su X è definita una relazione detta **relazione d’ordine** con le seguenti proprietà:   1. **riflessiva**: ; 2. **antisimmetrica**: , se e allora ; 3. **transitiva**= , se e allora   Un insieme ordinato *X* si dice **totalmente ordinato** se presi comunque due elementi è sempre possibile confrontarli secondo la relazione d’ordine definita su *X*.  Non tutti gli insiemi ordinati sono anche totalmente ordinati. |

## Campo e campo ordinato

|  |
| --- |
| Un insieme su cui sono definite due operazioni che soddisfano le proprietà **R1** ed **R2** si dice **campo**.  Un insieme su cui sono definite due operazioni ed una relazione d’ordine che soddisfano le proprietà **R1**, **R2** ed **R3** si dice **campo ordinato**. |

## Maggiorante e minorante

|  |
| --- |
| Sia un insieme ordinato e sia *B* un suo sottoinsieme. Si dice che un elemento è un **maggiorante** di *B* se  L’insieme dei maggioranti di *B* si indica con .  Dire che un elemento **non è un maggiorante** di *B* significa che  Un maggiorante di *B* non deve necessariamente appartenere all’insieme *B*. |
| Si dice invece che un elemento è un **minorante** di *B* se  Dire che un elemento **non è un minorante** di *B* significa che  Un minorante di *B* non deve necessariamente appartenere all’insieme *B*. |

## Limite inferiore e superiore

|  |
| --- |
| Si dice che un sottoinsieme *B* di un insieme ordinato è **limitato superiormente** se ha dei maggioranti, cioè se .  Analogamente, si dice che un sottoinsieme *B* di un insieme ordinato è **limitato inferiormente** se ha dei minoranti.  Si dice infine che un insieme è **limitato** se è limitato superiormente e inferiormente. |

## Massimo e minimo di un insieme

|  |
| --- |
| Sia un insieme ordinato e sia *B* un suo sottoinsieme. Si dice che un elemento è il **massimo** di *B* se:  In tal caso si scrive .  Il massimo di un insieme è un maggiorante che appartiene all’insieme stesso.  Si dice invece che un elemento è il **minimo** di *B* se:  Il minimo di un insieme è un minorante che appartiene all’insieme stesso. |

## Estremo superiore ed estremo inferiore

|  |
| --- |
| Sia un insieme non vuoto e limitato superiormente. Si dice che è l’**estremo superiore** di *A* se è il **minimo dei maggioranti** di *A* e si indica come .  Analogamente si dice che è l’**estremo inferiore** di *A* se è il **massimo dei minoranti** di *A* e si indica come . |

### Caratterizzazione dell’estremo superiore

### Caratterizzazione dell’estremo inferiore

## **R4**: assioma di Dedekind (o assioma di continuità)

|  |
| --- |
| Siano *A, B* due sottoinsiemi non vuoti di tali che:  Allora esiste un elemento , detto **elemento separatore** di *A* e *B*, tale che  Un insieme che soddisfa questa proprietà possiede la **proprietà dell’estremo superiore**. |

## Definizione assiomatica di

|  |
| --- |
| Chiamiamo un insieme che soddisfa le proprietà **R1**, **R2**, **R3**, ed **R4** e diremo che è un **campo ordinato che ha la proprietà dell’estremo superiore**. |

# Funzioni reali di una variabile reale

## Definizione di funzione

|  |
| --- |
| Dati due insiemi *A* e *B* qualsiasi, una **funzione di dominio** *A* **a valori in** *B* è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di *A* associa **uno ed un solo** elemento di *B*.  L’insieme *B* viene anche detto **codominio** della funzione.  L’uscita corrispondente ad un valore in ingresso si chiama **immagine** di quel valore.  L’insieme delle possibili uscite si chiama **immagine del dominio tramite *f***. |

## Grafico di una funzione

|  |
| --- |
| Il grafico di una funzione è l’insieme |

## Funzioni limitate

|  |
| --- |
| Sia . Si dice che *f* è **limitata superiormente** se esiste un elemento tale che , cioè se l’immagine di *D* tramite *f* è un insieme limitato superiormente. Dal punto di vista grafico significa che il grafico di è contenuto nel **semipiano inferiore** delimitato dalla retta .  Si dice che *f* è **limitata inferiormente** se esiste un elemento tale che , cioè se l’immagine di *D* tramite *f* è un insieme limitato inferiormente. Dal punto di vista grafico significa che il grafico di è contenuto nel **semipiano superiore** delimitato dalla retta .  Infine si dice che *f* è **limitata** se è limitata inferiormente e superiormente. Dal punto di vista grafico significa che il grafico di è contenuto in una “striscia” delimitata da due rette ed . |

## Funzioni simmetriche

|  |
| --- |
| Sia . Allora *f* si dice **pari** se il suo grafico è simmetrico rispetto all’**asse delle ordinate** (cioè se per ogni ). Un esempio di funzione pari è .  *f* si dice invece **dispari** se il suo grafico è simmetrico rispetto all’**origine degli assi** (cioè se per ogni ). Un esempio di funzione dispari è .  Una funzione può non essere né pari né dispari.  Non esistono funzioni con grafico simmetrico rispetto all’asse *x* perché questo farebbe perdere l’unicità della corrispondenza tra gli elementi del dominio e del codominio. |

## Funzioni monotone

|  |
| --- |
| Sia .  *f* si dice **monotona crescente** se  Si dice invece che *f* è **monotona decrescente** se  Se le disuguaglianze sono strette si dice che *f* è monotona **strettamente** crescente (o monotona **strettamente** decrescente, a seconda dei casi). |

## Funzioni periodiche

|  |
| --- |
| Sia . Si dice che *f* è **periodica** di periodo *T* (con ) se *T* è il più piccolo numero reale positivo tale che .  Ogni intervallo di lunghezza *T* si dice **intervallo di periodicità**. |

## Funzioni composte

|  |
| --- |
| Siano date due funzioni e con cioè .  Si definisce la **funzione composta** di *f* e *g* come  tale che  agisca come segue:  Il dominio di una funzione composta è dato dall’**intersezione** dei domini delle funzioni che la compongono. |

## Funzioni invertibili

|  |
| --- |
| Se accade che  allora *f* si dice **invertibile** e si realizza una **corrispondenza biunivoca** tra *D* e . |

## Funzioni iniettive, suriettive e biiettive

|  |
| --- |
| Una funzione è **iniettiva** se accade che  o equivalentemente  Una funzione si dice **suriettiva** se accade che  Una funzione si dice **biiettiva** se accade che |

## Funzione inversa

|  |
| --- |
| La funzione che per ogni associa l’unico elemento tale che si abbia si chiama **funzione inversa** e si indica con il simbolo . |

## Condizione necessaria e condizione sufficiente

|  |
| --- |
| Date due proposizioni *P* e *Q* si dice che:   * *P* è **condizione necessaria** per *Q* se ; * *P* è **condizione sufficiente** per *Q* se |

# Successioni

## Semiretta di numeri naturali

|  |
| --- |
| Si dice **semiretta di numeri naturali** un insieme del tipo . |

## Definizione di successione

|  |
| --- |
| Si dice **successione** una qualunque applicazione definita su una semiretta di . Se il **codominio** dell’applicazione è un insieme *A*, si parla di successione di elementi di *A* (o anche successioni a valori in *A*). |

## Successioni limitate inferiormente e superiormente

|  |
| --- |
| Una successione si dice **limitata inferiormente** se l’immagine è un insieme limitato inferiormente, cioè se esiste tale che per ogni .  Una successione si dice **limitata superiormente** se l’immagine è un insieme limitato superiormente, cioè se esiste tale che per ogni .  Una successione si dice **limitata** se è limitata superiormente e inferiormente.  In particolare non è restrittivo dire che è limitata se esiste una costante tale che . |

## Definizione di “definitivamente” per successioni

|  |
| --- |
| Si dice che una successione possiede **definitivamente** una certa proprietà se soddisfa quella proprietà, cioè se la possiede “da un certo punto in poi”. |

## Successioni convergenti

|  |
| --- |
| Una successione si dice **convergente** se esiste con queste proprietà:  definitivamente  oppure, equivalentemente:  Il numero *ℓ* si chiama **limite della successione** e si indica come  oppure per |

## Successioni divergenti

|  |
| --- |
| Una successione di dice **divergente** a se  Una successione si dice **divergente** a se  In tal caso o sono i limiti delle successioni divergenti e scriveremo |

## Successioni irregolari

|  |
| --- |
| Una successione che non ammette limite (cioè non è né convergente né divergente) si dice **irregolare** o **indeterminata**.  Esempio: la successione è una successione irregolare. |

## Successioni infinite e infinitesime

|  |
| --- |
| Una successione che tende a 0 si dice **infinitesima** (esempio: ), mentre una successione divergente si dice **infinita** (esempio: ). |

## Successioni monotone

|  |
| --- |
| Una funzione è **crescente** se e solo se  Analogamente è **decrescente** se e solo se |

## Sottosuccessioni

|  |
| --- |
| Si dice **sottosuccessione** di una successione la composizione della successione data con una qualunque applicazione **strettamente crescente** .  Una successione può essere vista come sottosuccessione di sé stessa. |

Il fatto che *k* sia un’applicazione strettamente crescente significa che la sottosuccessione può “iniziare” più indietro o più avanti rispetto alla successione di partenza, ma da quel punto in poi la sottosuccessione **deve** prendere **tutti** gli elementi che compaiono nella successione di partenza, **mantenendoli nello stesso ordine**.

## Definizione del numero di Nepero tramite limite

## Continuità (per successioni)

|  |
| --- |
| Una funzione si dice **continua** in se si verifica la seguente proprietà:  Se *f* è continua in ogni punto del dominio *A* si dice che *f* è continua. |

## Successioni asintotiche

|  |
| --- |
| Due successioni e si dicono **asintotiche**, e si indicano con , se: |

## Punto limite

|  |
| --- |
| Si dice che è un **punto limite** di una successione se questa ha almeno una sottosuccessione che ha limite *ℓ*.  Ogni successione limitata ha almeno un punto limite in . |

# Limiti di funzioni reali di variabile reale

## Intorno di un punto

|  |
| --- |
| Si dice **intorno di un punto** un intervallo del tipo per un qualche .  Un intorno di è un intervallo del tipo mentre un intorno di è un intervallo del tipo .    intorno di |

## Punto isolato

|  |
| --- |
| Sia . Un punto si dice che è un **punto isolato** di *A* se:  Un punto isolato di *A* appartiene ad *A*.  Un punto si dice **punto isolato** di *A* se **esiste almeno un intorno** di che in comune con l’insieme *A* ha soltanto il punto stesso. |

## Punto di accumulazione

|  |
| --- |
| Sia . Un punto si dice **punto di accumulazione** per *A* se  Un punto è un **punto di accumulazione** di *A* se **tutti** gli intorni di hanno in comune con l’insieme *A* altri punti diversi da stesso. |

## Definizione topologica di limite

|  |
| --- |
| Sia e sia un punto di accumulazione per . Si dice che  se |

## Limite finito all’infinito

|  |
| --- |
|  |
|  |

## Asintoto orizzontale

|  |
| --- |
| Un **asintoto orizzontale** è una retta di equazione con tale che per oppure per si abbia  Ogni situazione di limite finito all’infinito corrisponde graficamente ad un asintoto orizzontale. |

## Limite infinito all’infinito

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

## Asintoto obliquo

|  |
| --- |
| Si dice che una funzione ha **asintoto obliquo** di equazione (con e per oppure per se accade che:  oppure rispettivamente  La funzione ammette asintoto obliquo per se e solo se **entrambi** questi limiti esistono e **sono finiti**:  ed in tale caso l’asintoto è la retta .  Lo stesso criterio può essere utilizzato per . |

## Limite infinito al finito

|  |
| --- |
|  |
|  |

## Asintoto verticale

|  |
| --- |
| Si dice che *f* ha un **asintoto verticale** di equazione (con per (oppure per o ) accade che:  oppure, a seconda dei casi: |

## Limite finito al finito

|  |
| --- |
|  |

## Continuità (per funzioni)

|  |
| --- |
| Sia e sia un punto di accumulazione appartenente a . Allora si dice che *f* è **continua** in se esiste  Si dice che *f* è continua se risulta continua in ogni punto del suo dominio. Una funzione non continua in un punto si dice **discontinua**. |

Parlare di continuità (e di discontinuità) in un punto ha senso solo se .  
Non ha senso quindi dire che non è continua in , perché quel punto non appartiene al dominio della funzione.

## Discontinuità a salto

|  |
| --- |
| Si dice che è un **punto di discontinuità a salto** per quando i limiti destro e sinistro esistono finiti ma diversi tra loro. L’ampiezza del salto in in questo caso è data da  Se uno dei due limiti coincide per con si dice che *f* è **continua da destra** o **continua da sinistra** rispettivamente. |

## Definizione successionale di limite

|  |
| --- |
| Si dice che  se accade che |

## Relazione di “asintotico” (per funzioni)

|  |
| --- |
| Si dice che due funzioni sono **asintotiche** per e si indicano come se |

# Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale

## Definizione di derivata

|  |
| --- |
| Sia . *f* si dice **derivabile** in se **esiste finito** il limite  e tale limite prende il nome di **derivata prima** di *f* in e si indica come .  Si ha dunque  o equivalentemente |

## Punto angoloso

|  |
| --- |
| Sia , sia . Allora se esiste ed è finito il limite  oppure  allora *f* si dice **derivabile da destra** (o rispettivamente **derivabile da sinistra**) e il precedente limite finito si indica con (o rispettivamente ) e si chiama **derivata destra** (o rispettivamente **derivata sinistra**).  Nel caso in cui *f* sia continua e derivabile sia da destra che da sinistra in un punto allora si dice che *f* ha un **punto angoloso** in . |

## Cuspide

|  |
| --- |
| Se *f* è continua in e e contemporaneamente allora si dice che *f* in ha una **cuspide**. |

# Notazioni asintotiche

## Definizione di “o piccolo”

|  |
| --- |
| Date due funzioni e definite in un intorno di si dice che  se accade che  Per definizione si ha che . |

## Notazione “O-grande”

|  |
| --- |
| Date due funzioni e si dice che se e solo se esistono due costanti e tali che |

## Notazione

|  |
| --- |
| Date due funzioni e si dice che se e solo se esistono due costanti e tali che |

## Notazione

|  |
| --- |
| Date due funzioni e si dice che se e contemporaneamente .  Questo equivale a dire che esistono 3 costanti , ed tali che |

# Serie

## Definizione di serie

|  |
| --- |
| Data una successione di numeri reali, si chiama **serie associata** ad (o anche **serie di termine generale** ) la quantità  Gli elementi di si chiamano **termini della serie**.  La successione  si chiama **successione delle somme parziali**. |

## Serie assolutamente convergente

|  |
| --- |
| Si dice che una serie è **assolutamente convergente** se la serie è convergente. |

**Parte resto**

# Approssimazione e formule di Taylor

## Definizione di polinomio di Taylor

|  |
| --- |
| Si dice **polinomio di Taylor** di ordine *n* associato alla funzione *f* e centrato in un polinomio di ordine *n* tale che |

Si tratta cioè di un polinomio che **approssima** la funzione. Quest’approssimazione, in quanto tale, ha un certo **errore**, espresso dal termine . Questo errore diventa sempre più trascurabile al crescere di *n*, quindi un polinomio di Taylor di grado 3 è più preciso rispetto allo stesso polinomio ma di grado 2.

# Applicazioni del calcolo differenziale: problemi di ottimizzazione

## Massimo e minimo di una funzione

|  |
| --- |
| Si dice che *M* è un **massimo** di *f* nell’intervallo e che è **punto di massimo** per *f* nell’intervallo se accade che  Analogamente si dice che *m* è il **minimo** di *f* in un intervallo e che è **punto di minimo** per *f* in se accade che |
| Si dice che *M* è **massimo locale** per *f* e che è **punto di massimo locale** per *f* se esiste un intervallo tale che  Analogamente si dice che *m* è **minimo locale** per *f* e che è **punto di minimo locale** per *f* se esiste un intervallo tale che  Se le precedenti disuguaglianze sono strette, si dice che *M* ed *m* sono rispettivamente **massimo locale stretto** e **minimo locale stretto** e che e sono rispettivamente **punto di massimo locale stretto** e **punto di minimo locale stretto**. |
| I punti di massimo e di minimo (locale, stretto o globale) si chiamano **punti di estremo**. |

Il massimo ed il minimo di una funzione, se esistono, sono unici (questo viene dal teorema di unicità del massimo per i campi ordinati, in questo caso l’insieme è l’immagine del dominio tramite la *f*). I punti di massimo/minimo globali/locali, invece, possono essere più di uno.

## Punto stazionario

|  |
| --- |
| Un punto si dice **punto stazionario** di *f* se accade che  cioè è un punto stazionario per *f* se in quel punto la derivata di *f* si annulla. |

## Figure concave e convesse

|  |
| --- |
| Una figura *F* si dice **convessa** se per ogni coppia di punti tutto il segmento è contenuto in *F*.  Se ciò non accade, cioè se esiste almeno una coppia di punti tale che il segmento che li unisce non è del tutto contenuto in *F*, la figura si dice **concava**. |

## Epigrafico di una funzione

|  |
| --- |
| Sia con I intervallo. Si chiama **epigrafico** di *f* l’insieme:  In altre parole, con epigrafico s’intende l’insieme dei punti che sta **al di sopra** della funzione.  Si dice che *f* è **convessa** se il suo epigrafico è un insieme convesso. Si dice invece **concava** se è convessa. |

## Funzioni concave e convesse

|  |
| --- |
| Sia con *I* intervallo. Allora si dice che *f* è **convessa** in *I* se per ogni coppia di punti il segmento di estremi e **non ha punti sotto** al grafico di *f*. Se ciò non accade, cioè se esiste una coppia di punti tali che il segmento che li congiunge non sta tutto al di sopra del grafico di *f*, allora si dice che *f* è **concava**. |

## Punto di flesso

|  |
| --- |
| Sia una funzione e un punto di derivabilità o un punto per cui . Allora si dice **punto di flesso** per *f* se esiste un intorno destro di (del tipo con ) in cui *f* è convessa e un intorno sinistro di (del tipo con ) in cui *f* è concava, o viceversa.  Dal punto di vista geometrico, un punto di flesso attraversa la propria retta tangente.  In altre parole, un punto di flesso è un punto in cui la funzione cambia la propria concavità (cioè da concava diventa convessa o viceversa) e in quel punto la derivata prima non esiste oppure è infinita (in quest’ultimo caso si ha un **flesso a tangente verticale**). |

# Calcolo integrale

## Partizione di un intervallo

|  |
| --- |
| Si chiama **suddivisione** o **partizione** di ogni insieme **finito** del tipo  con . |

## Somme di Cauchy-Riemann

|  |
| --- |
| Diciamo che la funzione limitata è **integrabile** se detta una qualsiasi successione di somme di Cauchy-Riemann, al variare di **esiste finito**:  e tale limite **non dipende** dalla scelta dei punti . In tal caso si pone: |

## Somme superiori e somme inferiori

|  |
| --- |
| Per ogni suddivisione *A* di , le quantità  verranno chiamate rispettivamente **somma inferiore** e **somma superiore** di *f* rispetto alla suddivisione *A*.  Infine, le quantità  verranno chiamate **integrale inferiore** e **integrale superiore** (secondo Riemann) di *f* su .  Dal punto di vista geometrico, se *f* è una funzione positiva integrabile su , allora rappresenta l’area del **plurirettangolo inscritto** nel sottografico di *f*:    mentre rappresenta l’area del **plurirettangolo circoscritto** al sottografico di *f*: |

## Definizione di funzione integrabile (tramite somme superiori e inferiori)

|  |
| --- |
| Una funzione limitata *f* si dice **integrabile** (secondo Riemann) su se si ha:  ed in tal caso il comune valore di ed viene detto **integrale di *f* su** e viene indicato come: |

## Funzione di Dirichlet

|  |
| --- |
| La **funzione di Dirichlet** è una funzione definita come:  Si può dimostrare che questa funzione è discontinua in ogni punto dell’intervallo e che non è integrabile secondo Riemann. |

## Esempio di applicazione lineare con l’integrale

|  |
| --- |
| L’applicazione definita sull’intervallo che associa ad ogni funzione *f* il suo integrale:  è un esempio di **applicazione lineare non decrescente**, cioè verifica due ipotesi:   1. , per ogni ed ogni *f*, *g*; 2. per ogni |

## Media integrale

|  |
| --- |
| Data una funzione integrabile si dice **media di *f* su**  la quantità |

## Definizione di primitiva

|  |
| --- |
| Se *f* è una funzione definita su un intervallo , si dice che è **una primitiva di *f*** se *G* è **derivabile** su e se si ha che |

## Esempio di funzione che non ha primitiva

|  |
| --- |
| Esistono funzioni che non hanno primitive. Un esempio è la funzione definita su tutto come:  Se per assurdo *F* fosse una primitiva di *f* su tutto si avrebbe che  per cui esisterebbero due costanti e tali che  Ma poiché *f* deve essere derivabile (e quindi **continua**) su tutto , deve essere che , ma ciò contraddice il fatto che per definizione di primitiva dovrebbe essere |

## Definizione di integrale indefinito

|  |
| --- |
| Si dice **integrale indefinito di *f*** e si indica con il simbolo  l’**insieme di tutte le primitive** di una funzione *f* rispetto alla variabile *x*, cioè tutte le funzioni tali che: |

L’espressione è equivalente a dire “derivata di…” (in questo caso “derivata di ”).

## Definizione di integrale definito

|  |
| --- |
| La quantità  è detta **integrale definito di *f* da *a* a *b***. |